

西北大学学报(自然科学版)
2009年2月,第39卷第1期,Feb., 2009, Vol.39, No.1
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

一个包含F. Smarandache对偶函数的方程

刘宝利[1],赵 刚[2]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069; 2. 西安航空职业技术学院,陕西 西安 710089)

摘要:目的 研究一类包含F. Smarandache对偶函数方程的可解性。方法 初等方法。结果 获得了给定方程的所有正整数解。结论 证明方程 $\sum_{d \mid n} S^*(d) = \omega(n)\Omega(n)$ 有且仅有3种形式的解。

关 键 词:F. Smarandache对偶函数;方程;正整数解
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2009)01-0027-03

1 引言及结论

对任意正整数 n,著名的F. Smarandache对偶函数 $S^*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$,即

$$S^*(n) = \max\{m: m! \mid n, m \in N\}。$$

例如 $S^*(n)$ 的前 n 个值为:$S^*(3)=1$, $S^*(4)=2$, $S^*(5)=1$, $S^*(6)=3$, $S^*(7)=1$, $S^*(8)=2$, $S^*(9)=1$, $S^*(10)=2$, $S^*(11)=1$, $S^*(12)=3$, $S^*(13)=1$, $S^*(14)=2$, $S^*(15)=1$, $S^*(16)=2$, …。由 $S^*(n)$ 的定义容易推出当 n 为奇数时,$S^*(n)=1$,当 n 为偶数时,$S^*(n)\geqslant 2$。这个函数是由罗马尼亚著名数论专家J. Sandor在文献[1]中首次提出的,并研究了它的各种初等性质,获得了一系列重要的结论。同时J. Sandor在文献[1]中还提出了下面的猜想:

$$S^*((2k-1)!(2k+1)!) = q-1。$$

其中 k 是一个正整数,q 是跟随 $2k+1$ 的第一个素数。

Maohua Le证明了这一猜想是正确的[2]。关于这一函数以及有关内容也可以参阅文献[3-5]。例如Shejiao Xue中证明了当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时有恒等式[5]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^s}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S^*(n)\, n^s} = \zeta(s) \cdot \left(1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)((n+1)!)^s}\right)。$$

其中 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是Riemann Zeta函数。

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$,由上式立刻推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

及

$$\lim_{s\to 1}(s-1) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^s}\right) = e-1,$$

这里 $e=2.718\,281\,828\,459\cdots$ 是一个常数。

此外,文献[5]中还利用初等方法获得了较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S^*(n) = (e-1)x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)。$$

本文的主要目的是利用初等方法研究一类包含F. Smarandache对偶函数方程的可解性,并获得了该方程的所有正整数解。设 n 的标准素因子分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,定义 $\omega(n)$ 为 n 的所有不同素因子的个数,不包括素因子的重数,即 $\omega(n)=k$,$\Omega(n)$ 定义为 n 的所有素因子个数和。即 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$。具体考虑了如下的问题:是否存在正

收稿日期:2007-07-03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省教育厅科研基金资助项目(08JK433)
作者简介:刘宝利,女,陕西宝鸡人,从事基础数学研究。

整数 n满足方程

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \omega(n)\Omega(n)。\qquad (1)$$

那么,到底有多少 n满足式(1)?本文完全解决了这一问题,即证明了下面的定理。

定　理　方程 $\sum_{d|n} S^*(d) = \omega(n)\Omega(n)$ 有且仅有以下 3种形式的解:

1) $n=p_1^{\alpha}p_2$ 或者 $n=p_1p_2^{\beta}$,其中 $2<p_1<p_2$, $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$;

2) $n=p_1^3p_2p_3$ 或者 $n=p_1p_2^3p_3$ 或者 $n=p_1p_2p_3^3$;

3) $n=p_1p_2p_3p_4$。

其中 $p_1<p_2<p_3<p_4$为奇素数。

2　定理的证明

利用初等方法直接给出定理的证明。容易验证当 $n=1$时,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = S^*(1) = 1,$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n) = 0。$$

等式(1)不成立,所以 $n=1$不是方程(1)的正整数解。

现在假定 $n>1$,对式(1)分下面几种情况讨论:

(i)当 n为奇数时,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,此时显然对任意 $d\mid n$有 $2!$不整除 n,所以 $S^*(d)=1$。于是,当 $n>1$且满足式(1)时有

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|n} 1 = d(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k),$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n) = k(\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_k)。$$

其中 $d(n)$表示 Dirichlet除数函数。

下面对 k的取值进行讨论:

(a)当 $k=2$时,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1),$$

$$\omega(n)\Omega(n) = 2(\alpha_1+\alpha_2)。$$

解方程 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=2(\alpha_1+\alpha_2)$得, $\alpha_1=1$或者 $\alpha_2=1$。所以, $n=p_1^{\alpha}p_2$或者 $n=p_1p_2^{\beta}$,其中 $2<p_1<p_2$, $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$。

(b)当 $k=3$时,满足方程(1)的等式为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)。\qquad (2)$$

下面对式(2)中的每个 α_i是否取 1进行讨论,其中 $1\leqslant i\leqslant 3$。

当式(2)中仅有一个 α_i为 1时,不妨设 $\alpha_1=1$,则式(2)左边变为 $2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$。同时,式(2)右边变为 $3(1+\alpha_2+\alpha_3)$。容易证明式(2)左边总是大于右边,所以方程(1)在此种情况下无解。

当式(2)中仅有两个 α_i为 1时,不妨设 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$,解等式(2)可得 $\alpha_3=2$。所以,方程(1)在此种情况下的解为 $n=p_1^3p_2p_3$或者 $n=p_1p_2^3p_3$或者 $n=p_1p_2p_3^3$。

当 3个 α_i均为 1时,等式(2)不成立。所以,方程(1)在此种情况下无解。

当 3个 α_i均大于 1时,可以证明下面的不等式成立。

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)>3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$

即

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+1>2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3。$$

用上述不等式的左边减右边可得

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+1)-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1(\alpha_2-2)+\alpha_2(\alpha_3-2)+\alpha_3(\alpha_1-2)+1\geqslant \alpha_1\alpha_2\alpha_3+1>0。$$

这就证明了式(2)左边总是大于右边,所以方程(1)在此种情况下无解。

(c)当 $k=4$时,满足方程(1)的等式为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)。\qquad (3)$$

下对式(3)中的每个 α_i是否取 1进行讨论,其中 $1\leqslant i\leqslant 4$。

当式(3)中的 4个 α_i均为 1时,等式(3)成立。所以方程(1)在此种情况下的解为 $n=p_1p_2p_3p_4$。

当式(3)中仅有 3个 α_i为 1时,不妨设 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$且 $\alpha_4>1$,等式(3)不成立。所以,方程(1)在此种情况下无解。

当式(3)中仅有两个 α_i为 1时,不妨设 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$,且 $\alpha_3>1$, $\alpha_4>1$,等式(3)不成立。所以,方程(1)在此种情况下无解。

当式(3)中仅有一个 α_i为 1时,不妨设 $\alpha_1=1$,且 $\alpha_2>1$, $\alpha_3>1$, $\alpha_4>1$。

将 $\alpha_1=1$代入式(3)得

$$2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=4(1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)。$$

将等式两边化简为

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4。$$

由于 $\alpha_2>1$, $\alpha_3>1$, $\alpha_4>1$,容易看出上述等式

的左边总是大于右边。所以式(3)左边总是大于右边。因此方程(1)在此种情况下无解。

当式(3)中4个 α_1均大于 1时,由于当 $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$时, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) > 2(\alpha_1+\alpha_2)$。

同理可知,当 $\alpha_3 > 1$, $\alpha_4 > 1$时, $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) > 2(\alpha_3+\alpha_4)$。所以

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1) > 4(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) = 4(\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4) > 4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4).$$

因此,等式(3)左边总是大于右边。所以方程(1)在此种情况下无解。

(d)当 $k > 4$且 $1 \leqslant i \leqslant k$可以证明方程(1)的左边总是大于右边。即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_k+1) > k(\alpha_1+\cdots+\alpha_k).$$

所以方程(1)在此种情况下无解。

下面用数学归纳法证明。设 $k=i$时,不等式成立。即

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_i+1) > i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i),$$

则当 $k=i+1$时

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_i+1)(\alpha_{i+1}+1) > i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1).$$

又因为

$$i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-(i+1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i+\alpha_{i+1}) =$$
$$i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)(\alpha_{i+1}+1)-i(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-i(\alpha_{i+1})-(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-\alpha_{i+1} =$$
$$(i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-(i+1)\alpha_{i+1} >$$
$$(i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i)-(i+1)(i\alpha_{i+1}-1) =$$
$$(i\alpha_{i+1}-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_i-i-1) > 0.$$

所以,当 $k=i+1$时,不等式亦成立。

(ii)当 n为偶数时,设 $n=2^{\alpha}m$,且 m为奇数,设 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$。容易推出

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|n/2} S^*(d)+\sum_{d|n/2} S^*(2d) \geqslant \sum_{d|n/2} 1+\sum_{d|n/2} 2 = 3d(n/2).$$

同时

$$\omega(n)\Omega(n) = (k+1)(\alpha+\alpha_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_k).$$

下面可以证明

$$3d(n/2) = 3\alpha(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1) > (k+1)(\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_k). \quad (4)$$

(a)当 $k=2$时,容易验证不等式(4)成立。

(b)当 $k=3$时,将不等式(4)两边展开比较,可以验证不等式(4)成立。

(c)当 $k > 3$时,也可以验证不等式(4)成立,证明方法类似于在讨论 n为奇数时, $k > 4$的情形,同样可用数学归纳法得到证明结果。

所以,在此种情况下方程也无解。

结合以上几种情况立刻完成定理的证明。

致谢:作者对导师张文鹏教授的悉心指导表示衷心的感谢。

参考文献:

[1] SANDOR J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Numb Th Discr Math, 1999, 11: 45-51.

[2] MAOHUA L. A conjecture concerning the Smarandache dual functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153-155.

[3] GORSKI D. The pseudo Smarandache functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 12: 104-108.

[4] SANDOR J. On additive analogues of certain arithmetic function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 128-132.

[5] XUE X. On the Smarandache dual function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 29-32.

(编　辑　亢小玉)

An equation involving the F. Smarandache dual function

LIU Bao-li[1,2], ZHAO Gang[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Xi'an 710089, China)

Abstract: Aim To study the solutions of an equation involving the Smarandache dual function $S^*(n)$. Methods Using the elementary methods. Results All its positive integer solutions were obtained. Conclusion It is proved that the equation has three kinds of solutions.

Key words: F. Smarandache dual function; equation; positive integer solutions